

```

\documentclass[a4paper]{article}
\usepackage[T1]{fontenc} % För svenska bokstäver
\usepackage[swedish]{babel} % För svensk avstavning och svenska rubriker
\usepackage{graphicx} % För att inkludera bilder
\usepackage{amsmath} % Enklare ekvationer, ekv.referenser etc.
\usepackage{latexsym} % Diverse extra symboler, tex \Box.

% -----
% Figurer
% -----
\graphicspath{{figurer/}} % Talar om att figurer finns under figurer/

% -----
% Skapa 'kommando' för definitioner och satser.
% -----
\newtheorem{definition}{{Definition}}
\newtheorem{sats}{{Sats}}

% -----
% Dokumentinformation
% -----
\title{Laborationsrapport - Stora talens lag}
\author{Anders Andersson}
\date{1 november 2004} % Blir dagens datum om det utelämnas

% -----
% Huvuddokumentet
% -----
\begin{document}

\maketitle % Skapar titel med författare och datum enligt ovan

\begin{abstract}
Vi har studerat Stora Talens Lag med hjälp av Matlab. Vi simulerade
tusen tärningskast och fann att medelvärdet konvergerar mot
väntevärdet 3.5.
\end{abstract}

\section{Introduktion}

\emph{Stora talens lag} är något som nästan alla har en intuitiv
uppfattning om. Fråga vem som helst på gatan hur många ögon man får
''i medel'' när man kastat en tärning många gånger, och svaret blir
''tre och en halv''. Men att formulera detta i exakta matematiska
termer är inte lika enkelt.

\section{Matematisk formulering}

\subsection{Stokastisk konvergens}

\begin{definition}
Låt  $X_1, X_2, X_3, \dots$  vara stokastiska variabler. Då sägs  $X_n$ 
konvergera i sannolikhet mot  $X$  då  $n \rightarrow \infty$  om

$$P(|X_n - X| > \epsilon) \rightarrow 0 \text{ då } n \rightarrow \infty$$

för varje  $\epsilon > 0$ .
\end{definition}

Vi skall i nästa avsnitt se att denna definition passar bra för att
beskriva stora talens lag.

\subsection{Stora talens lag}

\begin{sats}
Låt  $X_1, X_2, X_3, \dots$  vara oberoende och likafördelade stokastiska

```

Laborationsrapport - Stora talens lag

Anders Andersson

1 november 2004

Sammanfattning

Vi har studerat Stora Talens Lag med hjälp av Matlab. Vi simulerade
tusen tärningskast och fann att medelvärdet konvergerar mot väntevärdet
3.5.

1 Introduktion

Stora talens lag är något som nästan alla har en intuitiv uppfattning om. Fråga
vem som helst på gatan hur många ögon man får "i medel" när man kastat en
tärning många gånger, och svaret blir "tre och en halv". Men att formulera detta
i exakta matematiska termer är inte lika enkelt.

2 Matematisk formulering

2.1 Stokastisk konvergens

Definition 1 Låt X, X_1, X_2, X_3, \dots vara stokastiska variabler. Då sägs X_n
konvergera i sannolikhet mot X då $n \rightarrow \infty$ om

$$P(|X_n - X| > \epsilon) \rightarrow 0 \text{ då } n \rightarrow \infty$$

för varje $\epsilon > 0$.

Vi skall i nästa avsnitt se att denna definition passar bra för att beskriva
stora talens lag.

2.2 Stora talens lag

Sats 1 Låt X_1, X_2, X_3, \dots vara oberoende och likafördelade stokastiska variabler
med väntevärde m och varians σ^2 . Låt

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k.$$

Då gäller $\bar{X}_n \rightarrow m$ i sannolikhet då $n \rightarrow \infty$.

Bevis: Låt $\epsilon > 0$ vara godtyckligt. Eftersom $E[\bar{X}_n] = m$ och $V[\bar{X}_n] = \sigma^2/n$
ger Chebyshovs olikhet (se [1]) att

$$P(|\bar{X}_n - m| > \epsilon) \leq \frac{\sigma^2/n}{\epsilon^2}. \quad (1)$$

Då $n \rightarrow \infty$ går högerledet i (1) mot noll, och satsen är bevisad. \square

```

variabler med väntevärde  $m$  och varians  $\sigma^2$ . Låt
\begin{equation*}
\overline{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k.
\end{equation*}
Då gäller  $\overline{X}_n \rightarrow m$  i sannolikhet då  $n \rightarrow \infty$ .
\end{sats}

\textbf{Bevis:}
Låt  $\epsilon > 0$  vara godtyckligt. Eftersom
 $E[\overline{X}_n] = m$  och  $V[\overline{X}_n] = \sigma^2/n$  ger
Chebyshovs olikhet (se \cite{Blom}) att
\begin{equation}
P(|\overline{X}_n - m| > \epsilon) \leq \frac{\sigma^2/n}{\epsilon^2}.
\end{equation}
Då  $n \rightarrow \infty$  går högerledet i \eqref{eqn:Chebyshov} mot noll, och
satsen är bevisad.
\hfill  $\square$ 

```

```
\section{Simuleringar}
```

I detta avsnitt presenteras en simulering som illustrerar stora talens lag. Med hjälp av programmet Matlab simulerades tusen tärningskast, och efter varje kast beräknades medelvärdet av antalet ögon i de kast som gjorts så långt. Resultatet presenteras i Tabell-[\ref{tbl:tarningskast}](#) nedan.

```

\begin{table}
\begin{center}
\begin{tabular}{|r|r|}
\hline
 $n$  &  $\overline{X}_n$  \\
\hline
10 & 4.20 \\
50 & 3.56 \\
100 & 3.51 \\
200 & 3.39 \\
500 & 3.46 \\
1000 & 3.52 \\
\hline
\end{tabular}
\caption{Medelvärdet av tärningskast där  $n$  är antalet kast.}
\label{tbl:tarningskast}
\end{center}
\end{table}

```

Som avslutning presenteras också i [Figur-\[\ref{fig:tarningskast}\]\(#\)](#) en graf över hur medelvärdet utvecklas med antalet kast.

```

\begin{figure}[htb] % figuren 'here', 'top', eller 'bottom' av sidan.
\begin{center}
\resizebox{70mm}{!}{\includegraphics{StoraTalensLag.eps}}
\end{center}
\caption{Medelvärdets utveckling som funktion av antalet kast.}
\label{fig:tarningskast}
\end{figure}

```

```

% -----
% Referenslista
% -----
\begin{thebibliography}{99}

\bibitem{Blom}
Blom, G. \emph{Sannolikhetsteori med tillämpningar}.
Studentlitteratur, 1984.

\end{thebibliography}

\end{document}

```

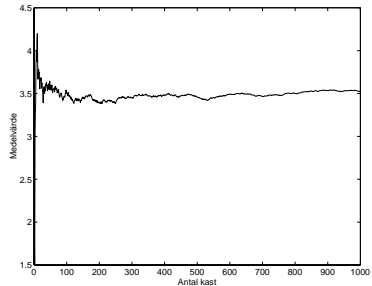
n	\overline{X}_n
10	4.20
50	3.56
100	3.51
200	3.39
500	3.46
1000	3.52

Tabell 1: Medelvärdet av tärningskast där n är antalet kast.

3 Simuleringar

I detta avsnitt presenteras en simulering som illustrerar stora talens lag. Med hjälp av programmet Matlab simulerades tusen tärningskast, och efter varje kast beräknades medelvärdet av antalet ögon i de kast som gjorts så långt. Resultatet presenteras i Tabell 1 nedan.

Som avslutning presenteras också i [Figur 1](#) en graf över hur medelvärdet utvecklas med antalet kast.



Figur 1: Medelvärdets utveckling som funktion av antalet kast.

Referenser

- [1] Blom, G. *Sannolikhetsteori med tillämpningar*. Studentlitteratur, 1984.